

Pratique Supplémentaire 3 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.5, 1.7, 1.8, 1.9 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Écrire les systèmes linéaires suivant sous la forme $A\vec{x} = \vec{b}$. Déterminer dans chaque cas si les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{array} \right. \qquad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{array} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Sol.:

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -2 & -7 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est carrée et le système possède une infinité de solutions, donc les colonnes de A sont linéairement dépendantes.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est carrée et le système possède seulement la solution triviale, donc les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

c)

$$\begin{pmatrix} -7 & 37 & 119 \\ 5 & 19 & 57 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A a strictement moins de lignes que de colonnes, donc ses colonnes sont linéairement dépendantes. On peut aussi arguer que le système possède une infinité de solutions.

Exercice 2

Donner une matrice A de taille 3×3 à coefficients non-nuls (tous!) et un vecteur \vec{b} de \mathbb{R}^3 , tels que \vec{b} n'appartienne pas à $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ où $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sont les colonnes de A .

Sol.: Il faut que \vec{b} ne puisse pas s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes de A . On peut par exemple prendre $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}_3$, on aura alors que le $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ est une droite de \mathbb{R}^3 . On choisit alors un vecteur \vec{b} qui n'est pas sur la droite de direction \vec{a}_1 . Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi prendre $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$ et \vec{a}_3 différent. Dans ce cas le span est un plan. On construit un vecteur \vec{b} qui n'est pas sur ce plan. **Remarque :** La notation **span** (en anglais) représente le **vec** (en français).

Exercice 3

a) Déterminer si les transformations linéaires suivantes sont injectives ou surjectives :

$$(a) \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) La rotation dans \mathbb{R}^3 d'axe Oz et d'angle 60° (dans le sens trigonométrique).

b) Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Démontrer que si T est surjective alors elle est aussi injective.

Sol.:

a) Rappelons qu'une transformation linéaire est surjective si la matrice associée, après échelonnage, possède un pivot dans chaque ligne ; une transformation linéaire est injective si la matrice associée, après échelonnage, a un pivot dans chaque colonne.

Ainsi :

(a) La matrice associée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

la transformation linéaire est injective mais pas surjective ;

(b) La matrice associée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la transformation linéaire n'est ni injective, ni surjective.

(c) La matrice de rotation a visiblement un pivot dans chaque ligne et dans chaque colonne puisque les deux premières lignes ne sont pas proportionnelles. Une telle rotation est donc injective et surjective, ce qui confirme notre intuition géométrique.

b) Soit A la matrice – carrée $n \times n$ – de l'application linéaire T . Cette application linéaire est surjective si et seulement si le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution pour tout vecteur \vec{b} de \mathbb{R}^n , ce qui signifie que le système est compatible. L'algorithme de réduction (ou méthode pivot, ou de Gauss) nous a appris que tel est le cas exactement lorsque la matrice A sous sa forme échelonnée et réduite a un pivot dans chaque ligne.

Pour montrer que T est injective, il suffit de montrer que le système *homogène* $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une unique solution. Or, la matrice A étant carrée, elle a un pivot dans chaque ligne si et seulement si elle a un pivot dans chaque colonne! Par conséquent chaque inconnue est de base (ou principale). Autrement dit la seule solution du système homogène est la solution triviale $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Nous avons prouvé que T est injective.

En fait une telle application T est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 4

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes si l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet la solution triviale.
- b) Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale.
- c) Les colonnes de toute matrice de taille 4×5 sont linéairement dépendantes.
- d) Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Sol.:

- a) Faux. Toute équation homogène admet la solution triviale, on ne peut donc rien dire à propos des colonnes de A . L'assertion serait vraie si l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admettait **uniquement** la solution triviale.
- b) Vrai. Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, cela signifie qu'il existe des nombres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $\lambda_1 \vec{c}_1 + \dots + \lambda_n \vec{c}_n = \vec{0}$ où $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ sont les n colonnes de A . Le vecteur $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est alors une solution non triviale de l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$.

- c) Vrai. Plus généralement, une matrice de taille $m \times n$ avec $m < n$ (plus de colonnes que de lignes) possède des colonnes linéairement dépendantes. Cela vient du fait que le nombre de lignes linéairement indépendantes d'une matrice A est égal au nombre de colonnes linéairement indépendantes de A (on dit que le rang-ligne de A est égal au rang-colonne de A). Ainsi, A possède au maximum m lignes linéairement indépendantes et donc au maximum m colonnes linéairement indépendantes. Comme $n > m$ on en déduit que les n colonnes de A doivent être linéairement dépendantes.
- d) Faux. Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$, disons $\vec{0} = \vec{v}_k$ pour un certain $1 \leq k \leq p$ alors la combinaison linéaire $0 \cdot \vec{v}_1 + \dots + 1 \cdot \vec{v}_k + \dots + 0 \cdot \vec{v}_p$ est égale au vecteur nul $\vec{0}$ et donc ces vecteurs sont linéairement dépendants.

Vrai-Faux

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5]$ comme ligne, alors le système est incompatible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) À chaque fois que l'on a une variable libre dans un système linéaire, le système possède une infinité de solutions. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Une solution générale d'un système est une description explicite de toutes les solutions du système. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Sol.:

- a) Vrai. Cela signifie que le système a 4 inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 et une telle ligne signifie que $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 5$ ce qui n'est pas possible, ainsi le système est incompatible.
- b) Vrai. Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont toutes deux des formes échelonnées du même système augmenté.
- c) Faux. Il se peut que le système soit incompatible et donc sans solution. Par exemple le système augmenté $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a x_2 comme variable libre (pas de pivot en 2ème colonne) mais est incompatible.
- d) Vrai. C'est une question de vocabulaire introduit en classe.

Vrai-Faux

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Les vecteurs $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont linéairement dépendants pour tout choix de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Un ensemble formé d'un seul vecteur est linéairement indépendant. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

- c) Une matrice 6×4 doit posséder quatre pivots pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes.
- d) Les colonnes d'une matrice 3×4 engendrent \mathbb{R}^3 .

Sol.:

- a) Vrai. En effet, appelons $\vec{u}_1 = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{w}$ et $\vec{u}_3 = \vec{v} - \vec{w}$. Alors on a que $\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = \vec{u}_3$ et donc ces vecteurs sont linéairement dépendants pour tout choix de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.
- b) Faux. Le vecteur nul $\vec{0}$ est toujours linéairement dépendant.
- c) Vrai. Si une matrice 6×4 possède 4 colonnes linéairement indépendantes alors elle a également 4 lignes linéairement indépendantes. Ainsi cette matrice (ou plutôt sa forme échelonnée-réduite) doit posséder quatre pivots (pour avoir 4 lignes indépendantes).
- d) Faux. Par exemple la matrice nulle de taille 3×4 a des colonnes qui sont toutes nulles et donc elles n'engendrent pas \mathbb{R}^3 .

Vrai-Faux

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant de \mathbb{R}^n et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de \mathbb{R}^m .
- b) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement dépendant de \mathbb{R}^n et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement dépendant de \mathbb{R}^m .
- c) Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ engendrent \mathbb{R}^n et sont tels que $T(\vec{v}_j) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, alors $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
- d) Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T est une application linéaire.
- e) Si $T(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire.

Sol.:

- a) Faux. Prenons par exemple $n = 2 = m$ et T l'application nulle $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$. Alors l'ensemble $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ avec $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un ensemble linéairement indépendant, mais $\{T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)\} = \{\vec{0}\}$ est dépendant.
- b) Vrai. Soit $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ un ensemble linéairement dépendant de \mathbb{R}^n , il existe alors $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ tels que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$. Donc, si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, on a que $\vec{0} = T(\vec{0}) = T(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 T(\vec{v}_1) + \lambda_2 T(\vec{v}_2)$. Ceci montre que $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement dépendant de \mathbb{R}^m .
- c) Vrai. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Comme les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ engendrent \mathbb{R}^n , il existe (au moins) une combinaison linéaire $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ telle que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{v}$. On a donc que $T(\vec{v}) = T(\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k)$ et comme T est linéaire on a donc $T(\vec{v}) = \lambda_1 T(\vec{v}_1) + \dots + \lambda_k T(\vec{v}_k)$. De là on trouve que $T(\vec{v}) = \vec{0}$ car par hypothèse $T(\vec{v}_j) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$.

- d) Faux. On peut prendre par exemple $n = 1 = m$ et $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(x) = x^2$. Cette application vérifie bien $T(0) = 0$ mais n'est pas linéaire.
- e) Vrai. Si $T(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors en prenant les valeurs $\lambda = 1 = \mu$ on trouve que $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. Puis en prenant $\mu = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on trouve $T(\lambda \vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$. Ceci montre que T est linéaire.

Vrai-Faux

Exercice 8

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire et A la matrice canoniquement associée.

Prouver les affirmations suivantes

- a) T est surjective si et seulement si les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m ;
- b) T est injective si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Sol.:

- a) Les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m si et seulement si pour tous $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation matricielle $A\vec{v} = \vec{b}$ admet une solution. Or $A\vec{v} = \vec{b}$ est équivalent à $T(\vec{v}) = \vec{b}$. Les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m si et seulement si pour tous $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $T(\vec{v}) = \vec{b}$ admet une solution. Ce qui revient à dire que T est surjective.
- b) Les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si l'équation $A\vec{v} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Ceci découle de la définition de l'indépendance linéaire. De nouveau $A\vec{v} = \vec{0}$ et $T(\vec{v}) = \vec{0}$ sont équivalentes. Ainsi les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si l'équation $T(\vec{v}) = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Comme l'équation $T(\vec{v}) = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale, T est injective.

Exercice 9

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Déterminer la condition nécessaire que doivent satisfaire m et n pour que

- a) T soit surjective,
- b) T soit injective,
- c) T soit bijective.

Sol.:

- a) Pour que l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ soit surjective, il faut que la matrice associée ait une position pivot par ligne. La condition nécessaire (mais pas suffisante) est donc $n \geq m$.
- b) Pour que l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ soit injective, il faut que la matrice associée ait une position pivot par colonne. La condition nécessaire (mais pas suffisante) est donc $n \leq m$.
- c) Pour que l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ soit bijective, il faut que T soit surjective et injective. La condition nécessaire (mais pas suffisante) est donc $n = m$.

Exercice 10

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

- a) Montrer que si T est surjective, alors T est aussi injective.
- b) Montrer que si T est injective, alors T est aussi surjective.

Sol.: Soit A la matrice de taille $n \times n$ associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- a) Supposons que T est surjective. Par hypothèse, la matrice A possède une position pivot par ligne, c'est-à-dire n pivots. Par conséquent, il y a un pivot par colonne et T est aussi injective.
- b) Supposons que T est injective. Par hypothèse, la matrice A possède un pivot par colonne, c'est-à-dire n pivots. Par conséquent, il y a un pivot par ligne et T est aussi surjective.